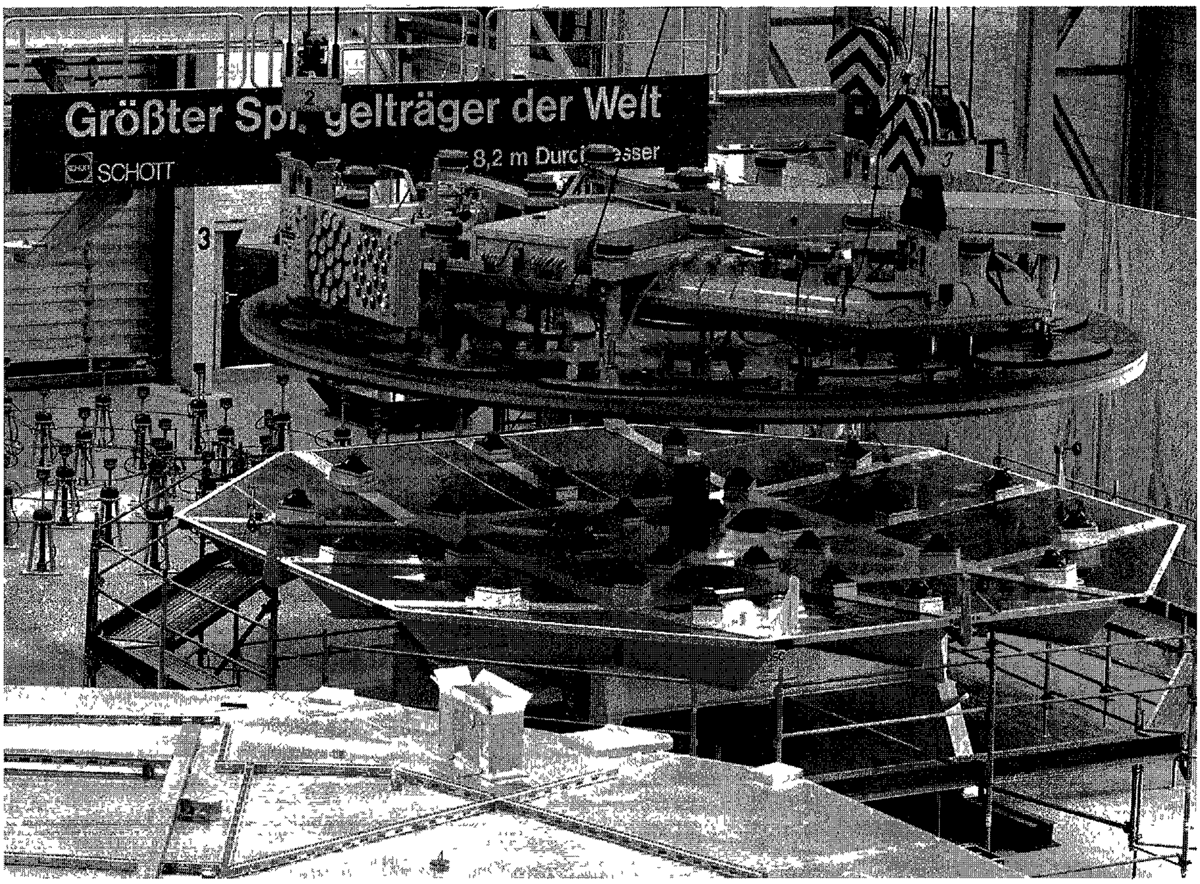
Ondersteuning van een te pspiegel

Klaas Compaan

Bij het bouwen van een Newtontelescoop komt men op zeker moment terecht bij de vraag hoe de gekochte of zelf geslepen hoofdspiegel moet worden ondersteund. Op drie of meer punten, en als het er maar drie zijn, moeten die dan aan de rand komen of meer naar het midden? Voor een zelfbouwer is het belangrijk om het antwoord op deze vragen te kennen, want een onjuiste ondersteuning kan de prestaties van een goede spiegel bederven.



Een spiegel vervormt onder invloed van zijn eigen gewicht Deze vervorming is het grootst wanneer de kijker naar het zenit gericht staat. In dit artikel gaan we na hoe groot dit effect is en hoe we het zo klein mogelijk kunnen maken

Vaak zijn drie symmetrisch gelegen ondersteuningspunten voldoende In de literatuur treft men nogal uiteenlopende adviezen aan over de beste plaats van deze punten In de klassieke boeken "*Lunettes et télescopes*" van A Danjon en A Couder (1935) en "*La construction du télescope d'amateur*" van J Texereau (1961) wordt aangeraden om de drie oplegpunten vlakbij de rand van de spiegel te kiezen, dus op een relatieve straal r = 1. In andere boeken wordt r = 0,7 of 0,8 aangegeven Maar wat is nu de beste waarde?

De toelaatbare vervorming

Voordat we kunnen zeggen of een bepaalde ondersteuning goed genoeg is, moeten we een optische eis stellen waar de spiegel aan moet voldoen. Men zou kunnen uitgaan van de Rayleigh-limiet, die stelt dat de grootste top-top afwijking van het spiegeloppervlak niet groter mag zijn dan $\lambda/8$, waarin λ de golflengte van het gebruikte licht is, doorgaans 0,55 micrometer Wij hebben echter een ander criterium genomen, namelijk dat van Maréchal, dat eist dat de effectieve waarde (RMS) van de afwijking niet groter is dan $\lambda/28$, zie kader. Belangrijk is daarbij dat het niet gaat om de absolute vervorming, maar om de afwijking ten opzichte van een zo goed mogelijk passende paraboloide, die immers een perfecte afbeelding zou geven.

Nu zijn er verschillende oorzaken die bijdragen tot beeldfouten, zoals slijpfouten van de spiegel, slechte seeing (maat voor de turbulentie in de atmosfeer, vergelijkbaar met bijvoorbeeld de trilling boven een heet wegdek) enzovoorts. De vervorming van de spiegel op zijn ondersteuning zal dan ook slechts een klein deel van de totale marge mogen opeisen. In navolging van Couder hebben we gekozen voor een effectieve waarde van $\lambda/90$.

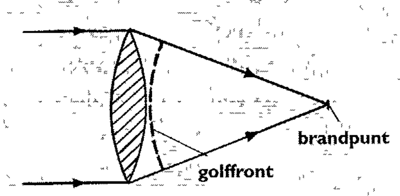
Doorbuiging van de spiegel

In de elasticiteitstheorie over dunne ronde platen kom je in de formules voor de doorbuiging de waarde van R^4/e^2 tegen, waarin R de halve middellijn voorstelt, en e de dikte, beide in cm. Het blijkt namelijk dat de doorbuiging recht evenredig is met deze R^4/e^2. In de evenredigheidsfactor, die de dimensie 1/cm heeft, zitten om te beginnen de materiaaleigenschappen van de plaat, zoals het soortelijk gewicht en de elasticiteitsmodulus. In dit artikel gaan we uit van pyrex als het spiegelmateriaal. De maximaal toelaatbare waarde van R^4/e^2, waaruit we de benodigde dikte voor de spiegel kunnen berekenen, hangt verder af van het aantal ondersteuningspunten, van hun plaats, en van de verdeling van het gewicht over die punten, wanneer de spiegel horizontaal ligt en de grootste vervorming ondergaat.

De limieten van Rayleigh en Maréchal

In een ideale telescoop wordt het licht van een ster als een zuiver bolvormig "golffront" naar het brandpunt geconcentreerd. In elk punt van dit golffront zijn de lichtgolven onderling steeds in precies dezelfde fase, zodat ze elkaar versterken. Wanneer in werkelijkheid het golffront niet zuiver bolvormig is, komt een deel van het licht met een verkeerde fase in het brandpunt aan, waardoor de afbeelding slechter wordt. Op verschillende manieren kan deze afwijking worden uitgedrukt in een getal, dat iets zegt over de optische kwaliteit van de telescoop. Het meest bekend is de zogenaamde Rayleigh-limiet. Hierbij wordt tegen het werkelijke golffront aan één zijde een zo goed mogelijk passende, rakende bol gelegd, en wordt de grootste afwijking ten opzichte daarvan bepaald. Als deze afwijking niet groter is dan een kwart golflengte van het gebruikte licht (meestal neemt men groen licht van 0,550 micrometer golflengte, omdat het oog hiervoor het meest gevoelig is), wordt aan de Rayleigh-limiet voldaan. In de meeste gevallen is een kijker die aan deze "λ/4" limiet voldoet van acceptabele kwaliteit, daarboven worden de optische prestaties duidelijk slechter.

Omdat echter niets wordt gezegd over het verloop van de afwijkingen, alleen over de maximale waarde, is de Rayleigh-limiet niet altijd streng genoeg. De zo goed mogelijk passende bol hoeft overigens niet het oorspronkelijke brandpunt als middelpunt te hebben, maar mag vrij worden gekozen. Dit betekent dat het beste brandpunt iets kan afwijken van het oorspronkelijke.



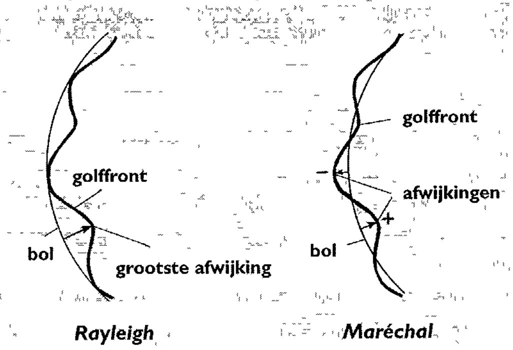
Een beter, maar wat moeilijker te bepalen kwaliteitscriterium is de limiet van Maréchal. Hierbij wordt een zuiver bolopppervlak dwars door het werkelijke golffront heen gelegd, zodat de afwijkingen zowel positief als negatief worden. Vervolgens wordt de effectieve waarde van de afwijkingen bepaald. Dit is de wortel uit het gemiddelde van het kwadraat van de afwijking (de Engelse term is RMS root mean square).

In formule:

$$A = \sqrt{\frac{1}{O}\int_O a^2\, dO}$$

waarin a de afwijking van het golffront is en O het oppervlak.
Het referentie-boloppervlak, dat weer vrij mag worden gekozen, wordt zodanig gelegd dat het resultaat A zo klein mogelijk wordt. A is dan de effectieve waarde van de afwijking, en als deze niet groter is dan l/14 voldoet de telescoop aan de Maréchal-limiet.
In normale gevallen zijn de uitkomsten van de limieten van Rayleigh en Maréchal ongeveer gelijkwaardig, maar bij onregelmatige afwijkingen is de Maréchal-limiet te prefereren, omdat deze beter rekening houdt met de vorm van deze afwijkingen.

Het bovenstaande heeft betrekking op het golffront. Bij een telescoopspiegel veroorzaakt een afwijking, bijvoorbeeld een kuil in het oppervlak, een twee maal zo grote fout in het golffront, omdat het licht de extra afstand twee keer moet afleggen. Voor het spiegeloppervlak zijn dus de Rayleigh- en Maréchal-limieten respectievelijk λ/8 en λ/28. Men vergelijkt dan bij een parabolische spiegel het oppervlak met een zuivere paraboloide, die bij Rayleigh tegen het oppervlak aan wordt gelegd, of bij Maréchal er dwars doorheen.



Couder heeft al aangegeven dat bij drie oplegpunten aan de rand $R^4/e^2 = 1000$ wordt voor een afwijking van $\lambda/90$ effectieve waarde. Voor een spiegelmiddellijn van 20 cm (R = 10 cm) vinden we hieruit een kleinste toelaatbare dikte e = 3,16 cm. Zouden we een 30 cm spiegel hebben, dan zou de dikte al 7,1 cm moeten zijn.

Maar hoe vinden we de waarde van R^4/e^2 als de drie punten meer naar het midden liggen, of als er meer punten zijn, verdeeld over verschillende cirkels? Nu kende Couder de elasticiteitstheorie wel, waaruit je deze waarde zou kunnen vinden, maar .. die formules zijn zo gecompliceerd dat je er zonder computer niet veel aan hebt. Couder heeft toen allerlei handige trucjes bedacht om deze waarde te vinden voor de grote spiegels van de verschillende Franse observatoria.

We hebben nu echter computers tot onze beschikking, zodat we die ingewikkelde formules (bijvoorbeeld uit "*Flachentragwerke*" van Karl Girkmann) aan kunnen. Nu zou het het mooist zijn als je bijvoorbeeld tegen de computer kon zeggen: hier heb je 40 steunpunten en vertel me maar waar die moeten staan en welke krachten erop moeten werken, en vertel ook meteen wat dan R^4/e^2 mag zijn.

Mijn computer, een Atari, is daar echter niet toe in staat, althans ik heb daar geen programma voor kunnen schrijven. Het probleem heb ik daarom als volgt vereenvoudigd: gegeven een aantal cirkels met daarop een gegeven aantal steunpunten symmetrisch verdeeld. Bepaal vervolgens voor iedere cirkel de beste waarde van de straal en de kracht er op, zodat R^4/e^2 zo groot mogelijk wordt met inachtneming van de optische $\lambda/90$-eis. Dat probleem is inderdaad programmeerbaar, en een aantal resultaten staat vermeld in de tabel. We bekijken eerst het eenvoudigste geval: drie steunpunten op één cirkel, zie tabel.

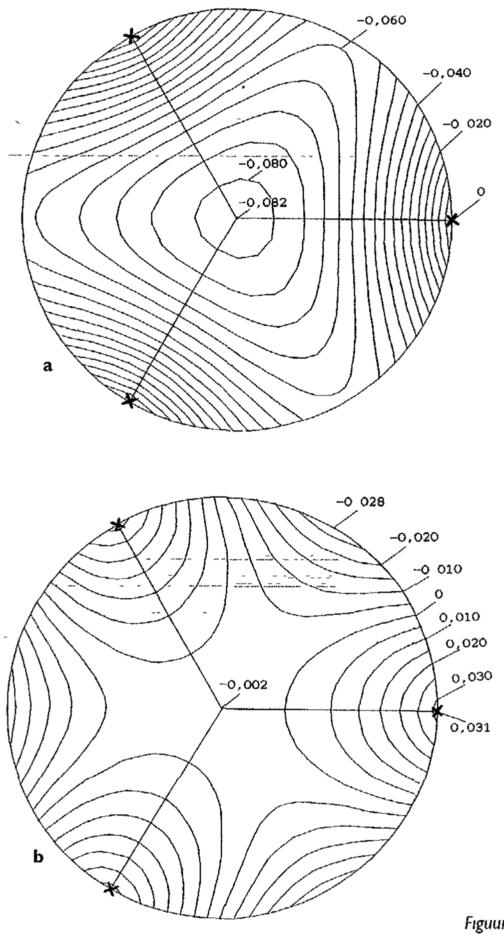
Steunpunten	r_1	r_2	r_3	k_1	k_2	k_3	R^4/e^2
3	1,000	-	-	1,000	-	-	1000
3	0,401	-	-	1,000	-	-	6130
6	0,573	-	-	1,000	-	-	43690
3 + 6	0,132	0,633	-	0,098	0,902	-	54110
6 + 12	0,327	0,748	-	0,271	0,729	-	399180
6 + 9 + 12	0,225	0,502	0,796	0,127	0,274	0,599	578840

Tabel 1 Enkele mogelijke spiegelondersteuningen. Aangegeven zijn de relatieve straal r waarop de steunpunten liggen en het aandeel k van de totale oplegkracht dat die punten dragen. Alle configuraties, behalve de eerste, zijn berekend voor minimaal nadelig effect op de vorm van de spiegel.

Drie steunpunten

In de bovenste regel van de tabel staat het geval dat we drie steunpunten aan de rand hebben ($r_1 = 1$). Zoals we al wisten is in deze situatie $R^4/e^2 = 1000$, en moet een 20 cm spiegel dus minstens 3,16 cm dik zijn. De vervorming die dan ontstaat is in figuur 1 is weergegeven als hoogtelijnen-patroon, waarbij figuur 1a de absolute vervorming toont, uitgedrukt in het aantal golflengten λ, terwijl Fig. 1b de afwijking toont ten opzichte van de beste referentie-paraboloïde volgens Maréchal. In Fig. 2a en 2b zien we ditzelfde als ruimtelijke figuren, waarbij de schaal in verticale richting honderdduizenden malen is vergroot.

We zien dat het midden van de spiegel inzakt, en dat de rand een golving rondom de steunpunten vertoont. Na correctie met de referentie-paraboloïde, de figuren



Figuur 1

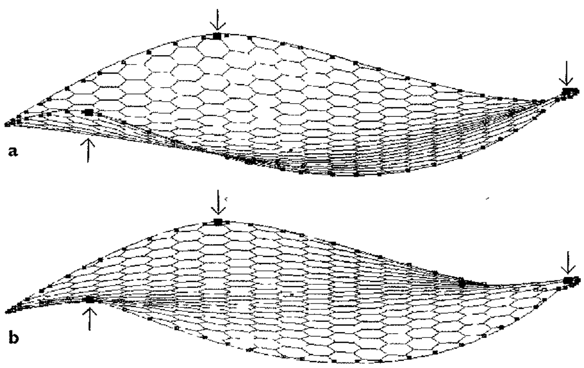
Hoogtelijnen op een 20 cm spiegel van 3,16 cm dikte, bij oplegging op drie steunpunten langs de rand. In a) wordt de werkelijke vervorming getoond, uitgedrukt in λ. Het nulvlak is genomen door de steunpunten. In b) zien we de afwijkingen die overblijven wanneer de best passende paraboloïde er van is afgetrokken. Het zijn deze afwijkingen die bepalend zijn voor de invloed van de ondersteuning op de beeldkwaliteit. Ze bedragen hier $\lambda/90$ in effectieve waarde.

1b en 2b, is de kuil in het midden verdwenen, maar de golf langs de rand is natuurlijk onveranderd

In de tweede regel van tabel 1 zijn de drie steunpunten meer naar het midden verplaatst, op 40% van de straal van de spiegel (r_1 = 0,4) Uit mijn berekeningen blijkt dit de grootste waarde van R^4/e^2 op te leveren, namelijk 6130. Dit betekent dat een 20 cm spiegel, op deze plaats ondersteund, maar 1,28 cm dik hoeft te zijn!

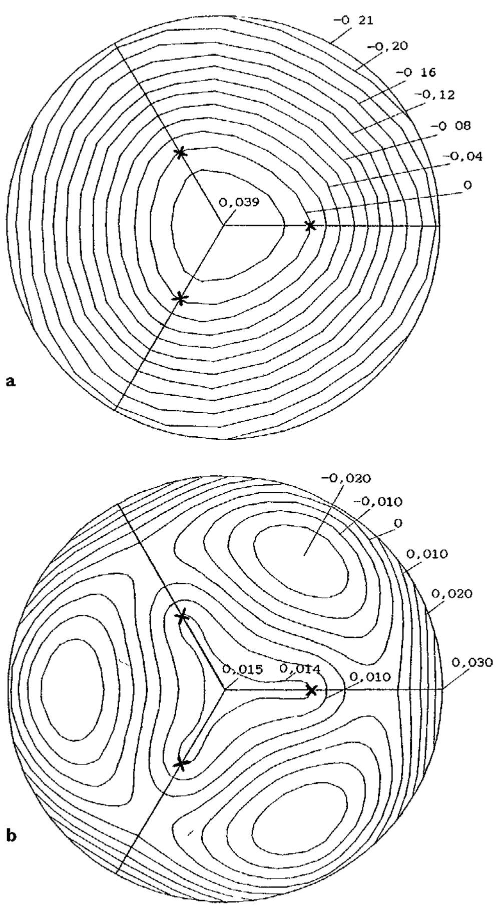
Fig 3 en 4 laten zien hoe de vervorming er dan in detail uitziet In Fig 3a en 4a zien we dat de doorzakking in dit geval andersom is in het midden zit nu een flinke berg, maar de vervorming is grotendeels parabolisch, zodat na aftrek van een passende paraboloide, in Fig 3b en 4b, toch aan de eis is voldaan.

Het is dus zeker zinvol om de steunpunten niet aan de rand te leggen, maar meer naar het midden. In Fig. 5 is voor een 20 cm spiegel het verloop van de benodigde dikte uitgezet als functie van de straal r_1 Het minimum ligt bij r_1 = 0,4 Waarom adviseerden Couder en Texereau dan toch het gebruik van punten aan de rand? Dat was om bij een schuine stand van de spiegel extra doorbuiging te voorkomen, die zou kunnen ontstaan



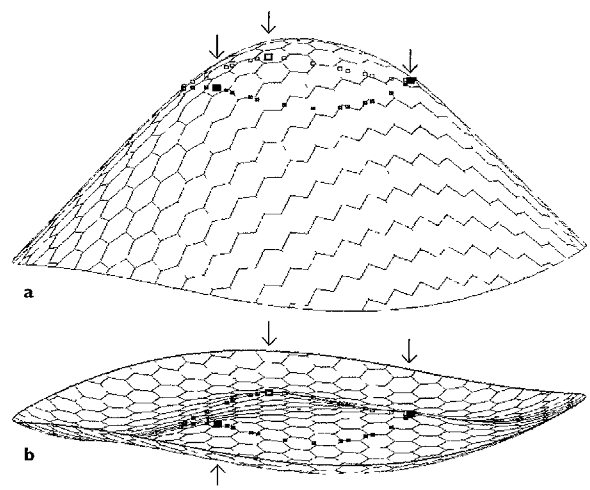
Figuur 2

Sterk vergrote weergave van de vervorming bij drie steunpunten langs de rand In a) zien we de werkelijke vervorming, in b) op dezelfde schaal de afwijkingen die overblijven na aftrek van de best passende paraboloide De kuil in het midden is dan verdwenen, maar de rand golft nog evenveel



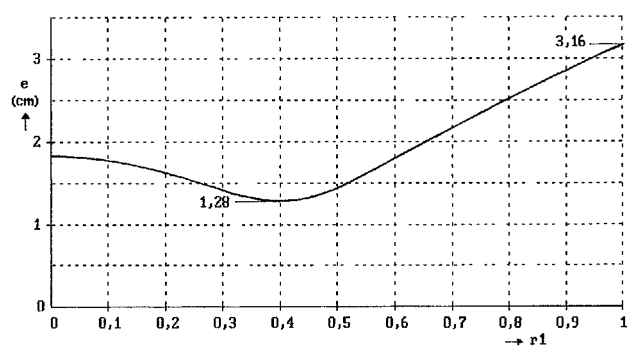
Figuur 3

Hoogtelijnen op een 20 cm spiegel van 1,28 cm dikte, die wordt ondersteund door drie punten op 40% van de straal De werkelijke vervorming zoals getoond in a) wordt na aftrek van de best passende paraboloide in b) gereduceerd tot dezelfde effectieve waarde als in het vorige geval



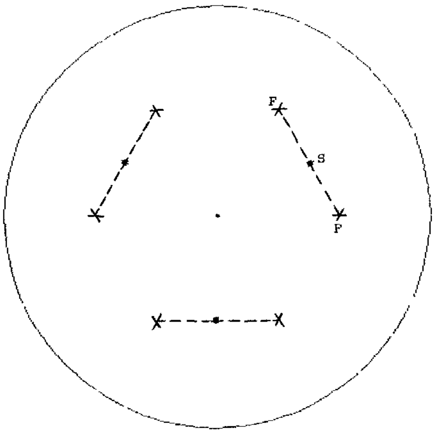
Figuur 4

Ruimtelijke weergave van de vervorming bij drie steunpunten op 40% van de straal De dunnere spiegel (die op deze schaal toch nog kilometers dik zou zijn) vertoont nu een berg in het midden, die echter door aftrek van de best passende parabolode grotendeels wordt opgeheven



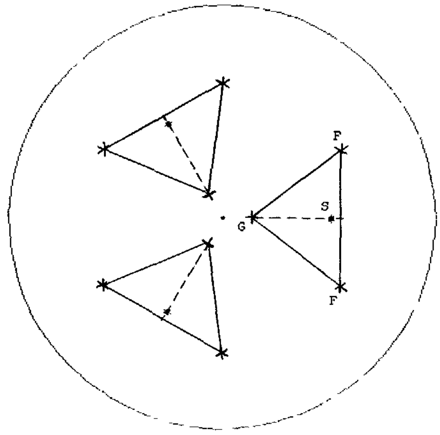
Figuur 5

Minimale dikte van een 20 cm spiegel als functie van de plaats van de drie steunpunten Bij een ondersteuning aan de rand (r_1 = 1) is de benodigde dikte het grootst



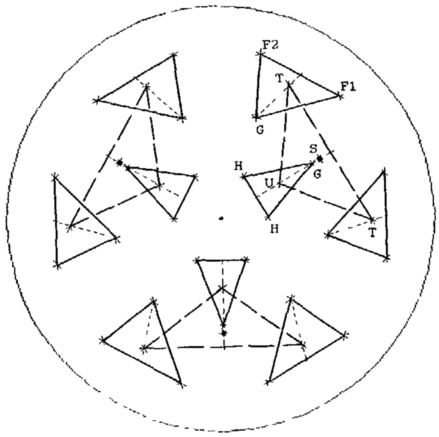
Figuur 6

Een grotere spiegel kan op zes punten worden ondersteund De punten F rusten paarsgewijs op balansjes die om punt S kunnen scharnieren De optimale plaats van de zes steunpunten is op 57,3% van de straal van de spiegel



Figuur 7

Ondersteuning op 9 punten voor grote spiegels De punten G liggen op een straal van 13,2%, de punten F op 63,3% De driehoeken die de punten dragen hebben zelf een kantelpunt in S De plaats daarvan bepaalt de verdeling van de oplegkrachten De optimale verdeling volgens de tabel wordt bereikt als de zwaartelijn uit G door punt S wordt verdeeld in twee stukken die zich omgekeerd verhouden als de steuncirkelkrachten k_1 en k_2 uit de tabel



Figuur 8

Zo zou een zeer grote spiegel op 27 punten kunnen worden ondersteund De 9 driehoeken F1-F2-G en H-H-G rusten zelf weer op 3 onderliggende driehoeken T-T-U. Door de positie van de kantelpunten wordt de gewenste verdeling van het gewicht gerealiseerd, volgens hetzelfde principe als in de vorige figuur

door wrijving tegen de steunpunten opzij. We moeten dan ook de spiegelbak zo ontwerpen dat de zijdelingse ondersteuning geen krachten loodrecht op het spiegeloppervlak kan opnemen

Meer dan drie punten

Voor grotere spiegels is het nodig om meer dan drie steunpunten te gebruiken De tabel geeft een aantal voorbeelden Zes punten op één cirkel met straal r_1 = 0,573 geven al een grote winst in R^4/e^2, zodat de spiegel veel dunner kan blijven. Zoals aangegeven in Fig 6 moeten de steunpunten dan paarsgewijs op de uiteinden van balansjes worden gemonteerd, zodat het gewicht van de spiegel zich over de zes punten kan verdelen

Om deze balansjes te vermijden kiest men vaak een oplegging op 9 punten, verdeeld over twee cirkels Twee punten op de buitenste cirkel en één op de binnenste steunen dan telkens op een driehoek, die zelf kan kantelen om een vast punt S, zie Fig. 7. De tabel geeft de beste plaats voor de punten aan, en ook de gewenste verdeling van de oplegkracht per cirkel De drie binnenste punten liggen op een cirkel met straal r_1 = 0,132 en dragen samen 9,8% van het gewicht De overige 90,2% wordt verdeeld over de zes buitenste punten, die op een straal r_2 = 0,633 liggen Het resultaat is dat R^4/e^2 = 54110, zodat bijv een 50 cm spiegel nog geen 3 cm dik zou hoeven te zijn

De vereiste verdeling van de oplegkracht over de buitenste en binnenste punten kan worden bereikt door de keus van het kantelpunt van de driehoeken Het principe hierbij is dat voor evenwicht van elke driehoek de som van de momenten nul moet zijn Hieraan wordt voldaan als het kantelpunt de zwaartelijn van de driehoek verdeelt in twee stukken die zich omgekeerd verhouden als de krachten k_1 en k_2 uit de tabel.

Zeer grote spiegels, van omstreeks 1 meter, kunnen worden opgelegd op 18 punten (met 6 driehoeken steunend op 3 balansjes) of 27 punten (verdeeld over 9 driehoeken, die zelf weer op drie onder-driehoeken steunen). Uit de tabel blijkt dat op deze wijze weer een grote toename van R^4/e^2 is te bereiken Fig 8 toont hoe in het laatstgenoemde geval de configuratie er uit zou kunnen zien.

Voor Cassegrain-spiegels, met een gat in het midden, kunnen eveneens zulke tabellen worden berekend. Maar voor elke gatdiameter moet er dan wel een aparte tabel worden gemaakt.

Naschrift

Dit artikel is gebaseerd op een concept dat de auteur, bij velen in de Nederlandse Vereniging Weer- en Sterrenkunde bekend als optisch deskundige, in het begin van 1996 schreef. Na een slopende ziekte overleed drs K. Compaan op 21 juni j.l., voordat hij het artikel in zijn definitieve vorm kon voltooien. Gebruik makend van het materiaal, waar Compaan zelf tot het laatst aan heeft gewerkt, heeft ondergetekende getracht deze taak zo goed mogelijk te volbrengen.

Zelfbouwers kunnen aan de hand van dit artikel nagaan hoe hun spiegel het beste kan worden ondersteund, bij een gegeven diameter en dikte. Het is verrassend hoe de auteur door het optimaliseren van plaats en gewichtverdeling voor de steunpunten tot resultaten komt die afwijken van hetgeen in de literatuur is te vinden [1]. Meestal ontwerpt men bijvoorbeeld een 9-punts ondersteuning zo dat elk punt eenzelfde gedeelte van het gewicht van de spiegel draagt. Dat levert weliswaar de kleinste absolute doorzakking op, maar niet de kleinste vervorming wanneer de best-passende paraboloide ervan is afgetrokken (dit laatste gebeurt automatisch bij het scherpstellen).

Bij het maken van de spiegelhouder is het belangrijk om ervoor te zorgen, dat de zijdelingse steunen niet een deel van de oplegkracht gaan opnemen wanneer de telescoop schuin omhoog gericht staat. Zoals Couder reeds aangaf zou dat een ongewenste doorbuiging kunnen veroorzaken. Om dit te voorkomen moeten de zijsteunen kunnen meegeven in de richting loodrecht op het spiegeloppervlak, bijvoorbeeld door ze te bekleden met een zacht, veerkrachtig materiaal zoals leer. De spiegel mag nooit klemmen in de steunen. Bij Dobsonkijkers, die een azimutale montering hebben, is een mooie constructie mogelijk waarbij de rand van de spiegel over 180° in een riem hangt.

Een praktische test die eventuele fouten in de ondersteuning aan het licht kan brengen is het bekijken van sterbeeldjes bij zeer sterke vergroting, binnen en buiten het focuspunt. Wanneer die beeldjes niet rond zijn maar min of meer driehoekig is er reden om de ondersteuning te verdenken, zeker wanneer de vorm verandert als men de kijker meer of minder schuin omhoog richt.

Jan Gerritsen

Literatuur

1] *Zie bijv A.G. Ingalls, Amateur Telescope Making, deel 1, ed. 1974, blz 229-234,*
Sky & Telescope, sept 1994 blz 84-87 en april 1996 blz 75-77

(Overgenomen uit ZENIT, 24e jaargang nr 1, januari 1997)